On a : $|U_{n+1} - \alpha| \leq 1/2 |U_n - \alpha|$

Or $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} . |3 - \alpha|$

d'ou $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}} . |3 - \alpha|$

Conclusion :

$|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |3 - \alpha| \quad \forall n \in IN$

b) $\frac{1}{2^n} |3 - \alpha| \leq 10^{-3}$

On a $. |3 - \alpha| \leq 1$

Car : $2 < \alpha < 3$

$\frac{1}{2^n} \leq 10^{-3} \Leftrightarrow 2^n \geq 1000$

$\Leftrightarrow n \ln 2 \geq \ln(1000) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(1000)}{\ln 2}$

Calculatrice ...⇒n≥10...⇒p=10.....

EX39

Partie A

$g(x) = e^x - \ln(x) - x.e^x + 1$ pour $x \in]0,+\infty[$

$\lim_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$

$(e^x \longrightarrow 1 \ ; \ x.e^x \longrightarrow 0 \ ; \ \ln(x) \longrightarrow -\infty)$

2) $\lim_{x \to +\infty} g(x) =$

$$\lim_{x \to +\infty} xe^x \left[\frac{1}{x} - \left(\frac{1}{e^x} \right) . \left(\underbrace{\frac{\ln(x)}{x}}_{0} \right) - 1 \right] + 1 = -\infty$$

3) $g'(x) = e^x - 1/x - (e^x + xe^x)$

$g'(x) = -(1/x + xe^x) < 0 \quad \forall x \in]0,+\infty[$

x		$+\infty$
g'(x)	—	
g(x)	$+\infty$ ↘	$-\infty$

4) g est continue et strictement décroissante sur $]0,+\infty[$. Elle réalise donc une bijection de $]0,+\infty[$ sur R.

Comme $0 \in R$ alors il existe un nombre réel $\alpha \in]0,+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

5) $g(1,23) \times g(1,24) < 0$

calculatrice

$\Rightarrow \quad \alpha \in]1,23 \ ; 1,24[$

6)

x	0		α		$+\infty$
g(x)	‖	+	0	-	

Partie B

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{e^x - \ln x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{e^x - \ln x} = 0 = f(0)$

d'ou f est continue à droite en 0.

2) $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{e^x - \ln x} = 0$

d'ou f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$.

3) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x} - \frac{\ln x}{x}} = 0$

La droite d'équation y = 0 est une asymptote à (C) au voisin de $(+\infty)$.

4) $f'(x) = \dfrac{(e^x - \ln x) - x(e^x - 1/x)}{(e^x - \ln x)^2}$

$f'(x) = \dfrac{g(x)}{(e^x - \ln x)^2}$

f' et g sont de même signe.

x	0		α		$+\infty$
f'(x)	‖	+	0	-	
f(x)	0	↗	f(α)	↘	0